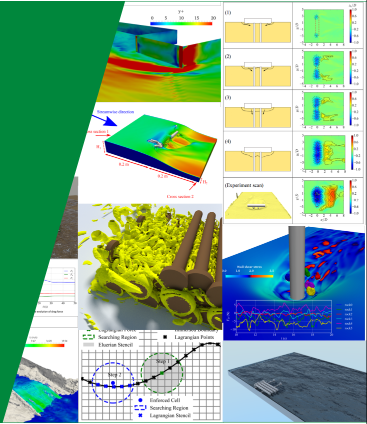
中国农业大学　流体机械与流体工程系

2024年春季《计算流体动力学编程实践》

5.2 近壁面模型/壁面函数



徐云成

✉ycxu@cau.edu.cn

2024 年 4 月 18 日

湍流的壁面效应

在近壁区域需要考虑以下效应

- 低雷诺数：当趋近于壁面时，湍流雷诺数（$Re_L = k^2/(\epsilon\nu)$）趋近于0
- 高剪切率(shear rate)：最高剪切率($\partial U/\partial y$)发生在壁面
- 湍流波动在垂直于壁面方向（wall-normal）上的减弱，较其他两个方向更快

湍流模型会因此做相应的修改

Damping functions阻尼函数

在标准$k-\epsilon$模型中，湍流粘性系数可以写成

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

但是该方程在近壁面往往高估湍流粘性系数。因此使用阻尼函数f_μ

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

一般阻尼函数可以定义为湍流雷诺数相关，例如

$$f_\mu = e^{\dfrac{-2.5}{1+Re/50}} \quad \text{Jones and Launder (1972)}$$

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0002y^+ - 0.00065y^{+2}} \quad \text{Rodi and Mansour (1993)}$$

Damping functions阻尼函数

在标准$k-\epsilon$模型中，湍流粘性系数可以写成

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

但是该方程在近壁面往往高估湍流粘性系数。因此使用阻尼函数f_μ

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

一般阻尼函数可以定义为湍流雷诺数相关，例如

$$f_\mu = e^{\dfrac{-2.5}{1+Re/50}}$$ Jones and Launder (1972)

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0002y^+ - 0.00065y^{+2}}$$ Rodi and Mansour (1993)

OpenFOAM® 中计算壁面上的y^+

```
<solver> -postProcess -func yPlus
```

例如

```
simpleFoam -postProcess -func yPlus
```

```
const fvPatchList& patches = mesh_.boundary();

forAll(patches, patchi)
{
    const fvPatch& patch = patches[patchi];

    if (isA<nutWallFunctionFvPatchScalarField>(nutBf[patchi]))
    {
        const nutWallFunctionFvPatchScalarField& nutPf =
            dynamic_cast<const nutWallFunctionFvPatchScalarField&>
            (
                nutBf[patchi]
            );

        yPlusBf[patchi] = nutPf.yPlus();
    }
    else if (isA<wallFvPatch>(patch))
    {
        yPlusBf[patchi] =
            d[patchi]
           *sqrt
            (
                nuEffBf[patchi]
               *mag(turbModel.U().boundaryField()[patchi].snGrad())
            )/nuBf[patchi];
    }
}
```

$$y^+ = d\sqrt{\nu_{Eff}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}/\nu}$$

$$y^+ = y\sqrt{\nu_{Eff}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}/\nu}$$

定义：

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} = \frac{yu^*}{\nu}$$

u_τ或u^*被称为剪切速度 shear velocity

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{Eff}\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

常见壁面函数相关量

Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

其中τ_w是指壁面剪切力 wall shear stress

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

无量纲壁面距离 wall distance:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

- μ是动力粘性系数(dynamic viscosity)
- ν是运动粘性系数(kinematic viscosity)
- $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$和$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$都对

常见壁面函数相关量

Shear velocity/friction velocity 剪切速度：

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

其中τ_w是指壁面剪切力 wall shear stress

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

无量纲壁面距离 wall distance:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意：

- μ是动力粘性系数(dynamic viscosity)
- ν是运动粘性系数(kinematic viscosity)
- $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$和$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$都对

Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

其中τ_w是指壁面剪切力 wall shear stress

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

无量纲壁面距离 wall distance:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

- μ是动力粘性系数(dynamic viscosity)
- ν是运动粘性系数(kinematic viscosity)
- $\nu = \dfrac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$和$u_\tau = \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}$都对

常见壁面函数相关量

Shear velocity/friction velocity 剪切速度:

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

其中τ_w是指壁面剪切力 wall shear stress

$$\tau_w = \tau(y=0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

无量纲速度:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

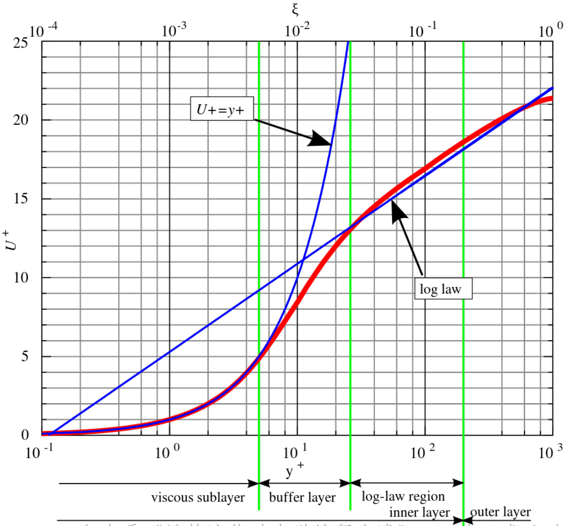
无量纲壁面距离 wall distance:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

注意:

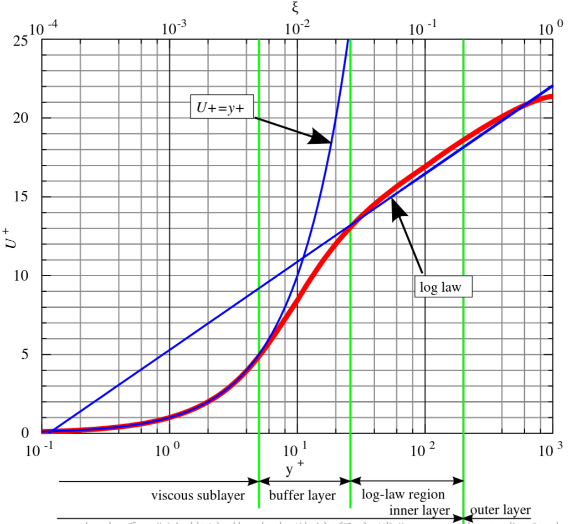
- μ是动力粘性系数(dynamic viscosity)
- ν是运动粘性系数(kinematic viscosity)
- $\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\tau_w}$和$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$都对

近壁面流动特征 $y^+ < 30$



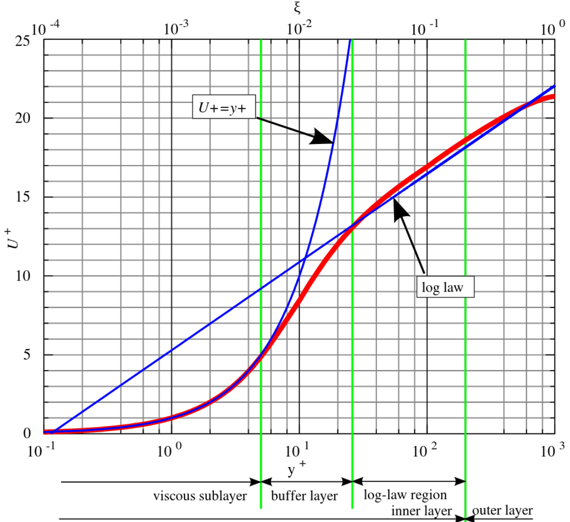
- 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- 远离壁面方向，较大平均速度梯度⇒较大湍动能⇒强湍流
- u、k、ϵ、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程

近壁面流动特征 $y^+ < 30$



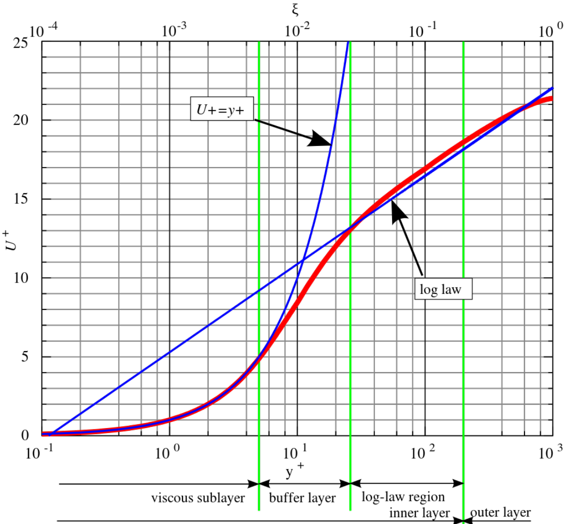
- 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- 远离壁面方向，较大平均速度梯度⇒较大湍动能⇒强湍流
- u、k、ϵ、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程

近壁面流动特征 $y^+ < 30$



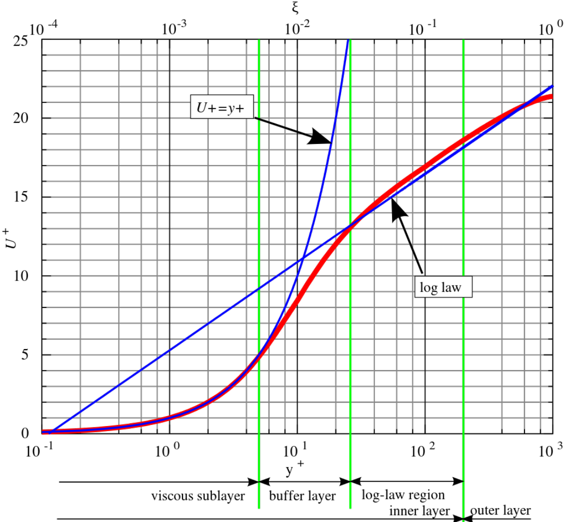
- 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- 远离壁面方向，较大平均速度梯度⇒较大湍动能⇒强湍流
- u、k、ϵ、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程

近壁面流动特征 $y^+ < 30$



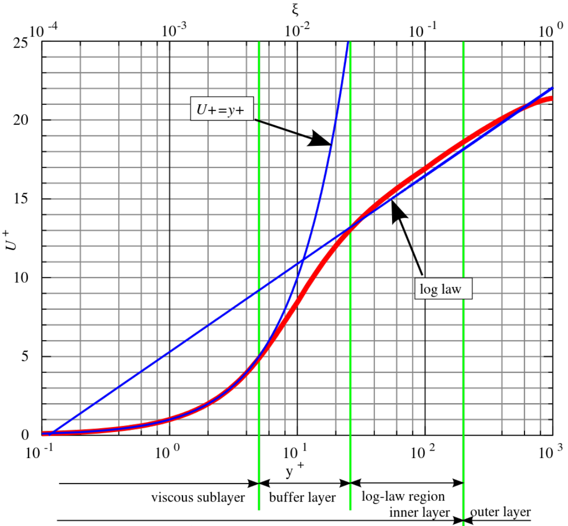
- 靠近壁面产生**粘性阻尼**会减弱速度波动
- **壁面阻挡**会减弱垂直壁面方向速度波动
- 远离壁面方向，较大平均速度梯度⇒较大湍动能⇒强湍流
- u、k、ϵ、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程

近壁面流动特征 $y^+ < 30$



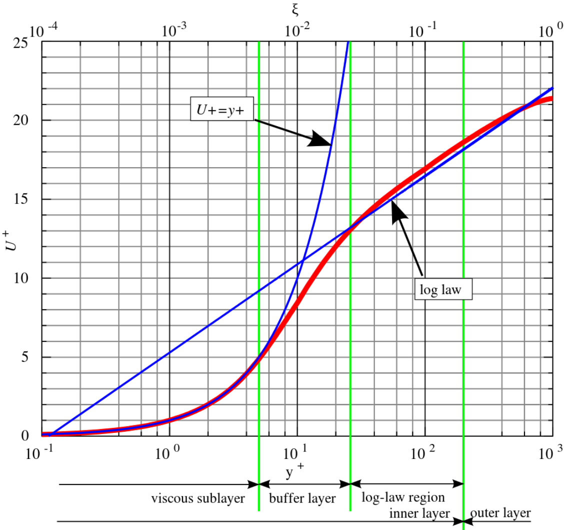
- 靠近壁面产生粘性阻尼会减弱速度波动
- 壁面阻挡会减弱垂直壁面方向速度波动
- 远离壁面方向，较大平均速度梯度⇒较大湍动能⇒强湍流
- u、k、ϵ、浓度、温度分布曲线较陡峭（梯度较大），有较强的质量、动量输运过程

近壁面流动特征



- viscous sub-layer/ laminar sub-layer（粘性层）（$0 < y^+ < 5$）:层流，粘性力主导
- buffer layer（$5 < y^+ < 30$）：粘性和湍流同样重要
- log-layer（对数层（$y^+ > 30$）:完全湍流 fully turbulent，inertial sub-layer（惯性层）（$30 < y^+ < 200$）

law of the wall



log-law（无量纲形式）：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C \tag{1}$$

其中，κ 是冯卡门常数，对于光滑壁面$\kappa \approx 0.41$，$C = 5.56$

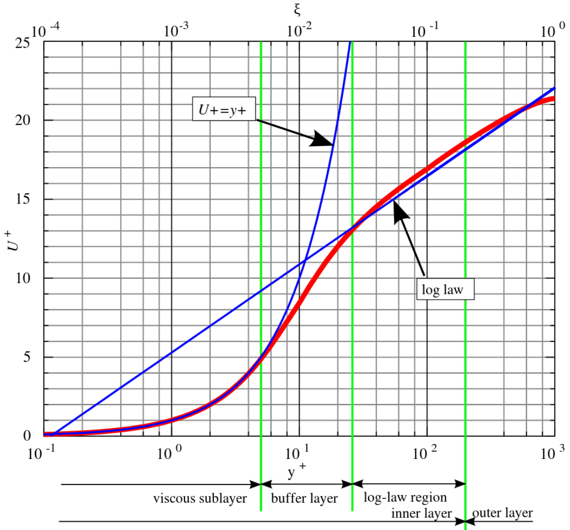
另一种形式：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) \tag{2}$$

log-law（有量纲形式）：

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa}\ln\frac{y}{y_0} \tag{3}$$

law of the wall



log-law（无量纲形式）：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C \tag{1}$$

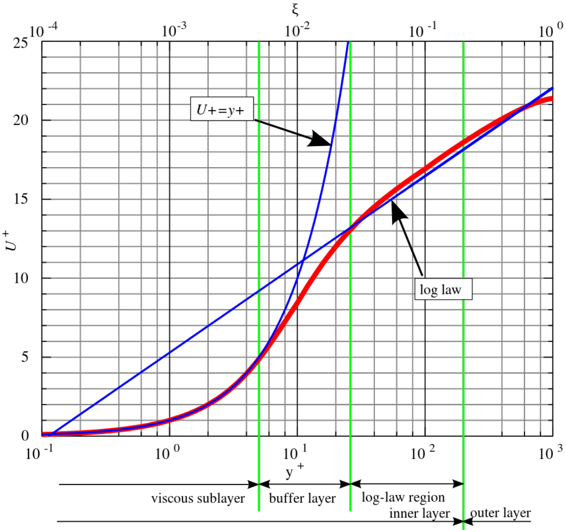
其中，κ 是冯卡门常数，对于光滑壁面$\kappa \approx 0.41$， $C = 5.56$
另一种形式：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) \tag{2}$$

log-law（有量纲形式）：

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa}\ln\frac{y}{y_0} \tag{3}$$

law of the wall



log-law（无量纲形式）：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \tag{1}$$

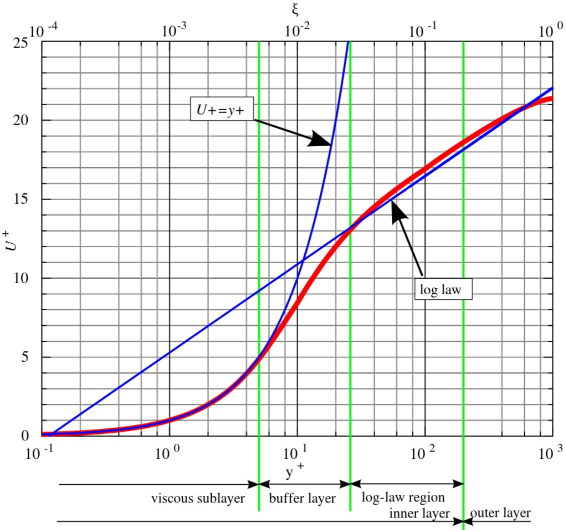
其中，κ 是冯卡门常数，对于光滑壁面$\kappa \approx 0.41$，$C = 5.56$
另一种形式：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \tag{2}$$

log-law（有量纲形式）：

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \tag{3}$$

law of the wall



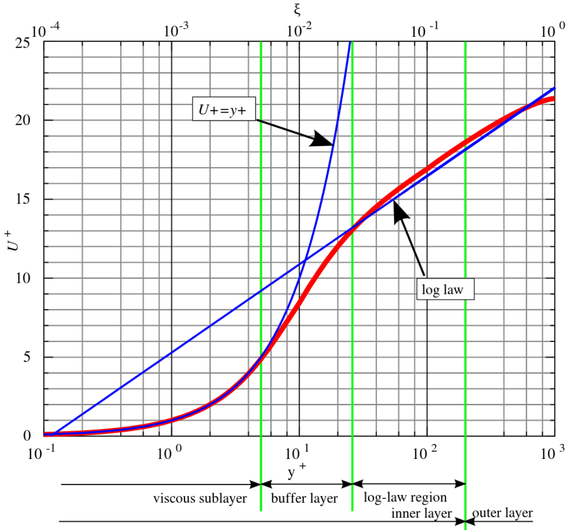
$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

Spalding wall function (Spalding, 1961)

`nutUSpaldingWallFunction`

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!}\right]$$

law of the wall



$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

Spalding wall function (Spalding, 1961)

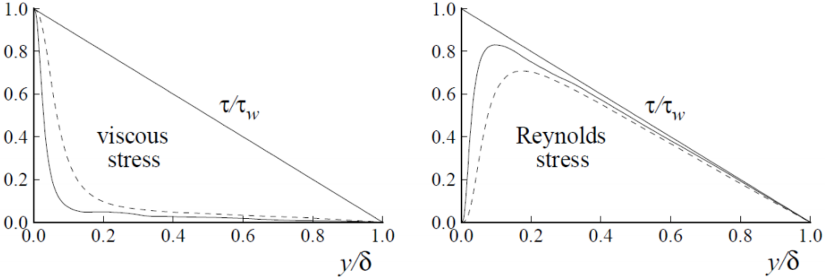
`nutUSpaldingWallFunction`

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!}\right]$$

壁面函数的推导

总剪切应力 total shear stress

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{粘性部分}} \underbrace{-\rho \overline{u'v'}}_{\text{湍流部分}} \tag{4}$$



当$y < 0.1\delta$时，总剪切力几乎是常数，等于壁面剪切力$\tau \approx \tau_w$

壁面函数的推导

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- 非常靠近壁面时，运动粘性系数ν和壁面剪切力τ_w这两个参数比较重要
- 因此，速度尺度用剪切速度τ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显，y^+是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性

壁面函数的推导

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- 非常靠近壁面时，运动粘性系数ν和壁面剪切力τ_w这两个参数比较重要
- 因此，速度尺度用剪切速度τ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显，y^+是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性

壁面函数的推导

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- 非常靠近壁面时，运动粘性系数ν和壁面剪切力τ_w这两个参数比较重要
- 因此，速度尺度用剪切速度τ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显，y^+是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性

壁面函数的推导

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- 非常靠近壁面时，运动粘性系数ν和壁面剪切力τ_w这两个参数比较重要
- 因此，速度尺度用剪切速度τ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显，y^+是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性

壁面函数的推导

定义一个重要的速度尺度，剪切速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \Rightarrow u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

近壁面不同尺度：

- 非常靠近壁面时，运动粘性系数ν和壁面剪切力τ_w这两个参数比较重要
- 因此，速度尺度用剪切速度τ，长度尺度用粘性长度尺度

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$$

- 所以可以无量纲化

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

很明显，y^+是一个局部雷诺数，可以用来衡量距离壁面不同位置时，粘性力和湍流的相对重要性

量纲分析 (边界层内部)

- 在边界层内部($y < 0.1\delta$)，重要的参数包括U, y, τ_w, ρ, ν，但是边界层厚度δ不重要
- 3个变量，3个独立量纲(m,s,kg)，组成2个独立的无量纲组：$u^+ = \dfrac{u}{u_\tau}$ 和$y^+ = \dfrac{u_\tau y}{\nu}$
- 存在普适性函数

$$u^+ = f_w(y^+)$$

量纲分析 (边界层外部)

- 在边界层外部，重要的参数包括$U, y, \tau_w, \rho, \delta$，不包括$\nu$
- 3个变量，3个独立量纲(m,s,kg)，组成2个独立的无量纲组：$\frac{u_e - u}{u_\tau}$ 和$\eta = \frac{y}{\delta}$
- 不存在普适性函数

$$u_e - u = f_o(\eta)$$

壁面函数的推导

- 边界层内部($y < 0.1\delta$） $u^+ = f_w(y^+)$
- 边界层外部($y > \delta$） $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若$\delta^+ = \delta u_\tau/\nu$，那么$y^+ = \eta\delta^+$。对$0.1\delta < y < \delta$部分，两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对δ^+求导

$$u_e^{+\prime}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对η求导

$$\begin{aligned} 0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ &= \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right) \end{aligned}$$

壁面函数的推导

- 边界层内部($y < 0.1\delta$） $u^+ = f_w(y^+)$
- 边界层外部($y > \delta$） $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若$\delta^+ = \delta u_\tau/\nu$，那么$y^+ = \eta\delta^+$。对$0.1\delta < y < \delta$部分，两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对δ^+求导

$$u_e^{+\prime}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对η求导

$$\begin{aligned}0 &= f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+)\\ &= f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+)\\ &= \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right)\end{aligned}$$

壁面函数的推导

- 边界层内部($y < 0.1\delta$） $u^+ = f_w(y^+)$
- 边界层外部($y > \delta$） $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若$\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$，那么$y^+ = \eta\delta^+$。对$0.1\delta < y < \delta$部分，两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对δ^+求导

$$u_e^{+\prime}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对η求导

$$\begin{aligned} 0 =& f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\ =& f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\ =& \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right) \end{aligned}$$

壁面函数的推导

- 边界层内部($y < 0.1\delta$） $u^+ = f_w(y^+)$
- 边界层外部($y > \delta$） $u_e^+ - u^+ = f_o(\eta)$

若$\delta^+ = \delta u_\tau/\nu$，那么$y^+ = \eta\delta^+$。对$0.1\delta < y < \delta$部分，两个方程相加

$$u_e^+(\delta^+) = f_o(\eta) + f_w(\eta\delta^+)$$

方程两侧对δ^+求导

$$u_e^{+\prime}(\delta^+) = 0 + \eta f_w'(\eta\delta^+)$$

再对η求导

$$\begin{aligned}
0 =& f_w'(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f_w''(\eta\delta^+) \\
=& f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+) \\
=& \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right)
\end{aligned}$$

壁面函数的推导

$$0 = \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right)$$

由该公式可得$y^+\frac{df_w}{dy^+}$应该是一个常数项，定义为$\frac{1}{\kappa}$，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa}(Ey^+)$$

$$0 = \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right)$$

由该公式可得$y^+\dfrac{df_w}{dy^+}$应该是一个常数项，定义为$\dfrac{1}{\kappa}$，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa}(Ey^+)$$

壁面函数的推导

$$0 = \frac{d}{dy^+}\left(y^+ \frac{df_w}{dy^+}\right)$$

由该公式可得$y^+ \dfrac{df_w}{dy^+}$应该是一个常数项，定义为$\dfrac{1}{\kappa}$，所以

$$\frac{df_w}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

方程两侧积分可以得到

$$f_w = u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa}(Ey^+)$$

关于log-law的一些...

- 常数项:$\kappa \approx 0.41, \dfrac{1}{\kappa} = 2.44, C = 5.56, E = 9.8$
- 在log-law区域

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}, \quad \frac{y}{u_\tau}\frac{\partial u}{\partial y} = y^+\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \text{constant}$$

壁面函数的推导（粘性层）

在粘性层(viscous sub-layer)，湍流波动主要受粘性阻尼作用，壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}=\tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y)=\frac{\tau_w}{\mu}$

由于在壁面存在无滑移条件：$u(y=0)=0$，所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+=y^+$$

DNS和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+<5$

壁面函数的推导（粘性层）

在粘性层(viscous sub-layer)，湍流波动主要受粘性阻尼作用，壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y) = \frac{\tau_w}{\mu}$

由于在壁面存在无滑移条件：$u(y=0)=0$，所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+ = y^+$$

DNS和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+ < 5$

壁面函数的推导（粘性层）

在粘性层(viscous sub-layer)，湍流波动主要受粘性阻尼作用，壁面函数也是只考虑粘性力作用

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

两边积分得到线性速度分布 $u(y) = \frac{\tau_w}{\mu}$

由于在壁面存在无滑移条件：$u(y=0)=0$，所以线性速度分布可以写成无量纲形式

$$u^+ = y^+$$

DNS和实验测量结果显示线性粘性层大致在 $y^+ < 5$

考虑粗糙度

- 许多真实问题中，壁面都不是光滑的
- 其中一种经典的粗糙高度(Nikuradse)无量纲形式定义为

$$k_s^+ = \frac{u_\tau k_s}{\nu} = \frac{k_s}{\delta_\nu}$$

- (Cebeci 1978)

$$E = \begin{cases} 0.9\left(\dfrac{k_s^+ - 2.25}{87.75} + 0.5k_s^+\right)^{-\sin\left[0.4258\left(\ln k_s^+\right) - 0.811\right]} & \text{if } k_s^+ > 90 \\ 0.9\left(1 + 0.5k_s^+\right)^{-1} & \text{if } k_s^+ \leqslant 90 \end{cases} \quad (5)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

OpenFOAM® 中的代码

```
if (yPlus > yPlusLam_)
{
    nutw[facei] = nuw[facei]*(yPlus*kappa_/log(E_*yPlus) - 1.0);
}
```

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(E y^+) - 1.0}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(E y^+) & \text{if } y^+ \geq y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$$

注：下标1代表第一层网格

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{Eff}\frac{\partial u}{\partial y} = (\nu_t + \nu)\frac{\partial u}{\partial y} \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

OpenFOAM® 中的代码

```
if (yPlus > yPlusLam_)
{
    nutw[facei] = nuw[facei]*(yPlus*kappa_/log(E_*yPlus) - 1.0);
}
```

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \geq y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$$

注：下标1代表第一层网格

$$u_\tau^2 = \tau = \nu_{Eff}\frac{\partial u}{\partial y} = (\nu_t + \nu)\frac{\partial u}{\partial y} \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \qquad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$u^+\frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau}\frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+\nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu\frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \qquad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$u^+\frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau}\frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+\nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu\frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \qquad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$u^+\frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau}\frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+\nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu\frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \qquad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$u^+\frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau}\frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+\nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu\frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

OpenFOAM® 利用壁面函数？

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}, \qquad y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}, \qquad u_\tau^2 \approx (\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$u^+\frac{1}{y^+} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{u}{u_\tau}\frac{\nu}{u_\tau y} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\frac{y^+\nu}{\nu + \nu_t} = \frac{1}{y^+}\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)$$

$$\nu_t = \nu\frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+


```
forAll(yPlus, facei)
{
    const scalar Re = magUp[facei]*y[facei]/nuw[facei];
    const scalar ryPlusLam = 1/yPlusLam_;

    int iter = 0;
    scalar yp = yPlusLam_;
    scalar yPlusLast = yp;

    do
    {
        yPlusLast = yp;
        if (yp > yPlusLam_)
        {
            yp = (kappa_*Re + yp)/(1 + log(E_*yp));
        }
        else
        {
            yp = sqrt(Re);
        }
    } while(mag(ryPlusLam*(yp - yPlusLast)) > 0.0001 && ++iter < 20);

    yPlus[facei] = yp;
}
```

`nutUWallFunction`：循环内

$$y^+_{\text{new}} = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \le y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

其中$Re = \dfrac{u_1 y_1}{\nu}$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \ge y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+


```
forAll(yPlus, facei)
{
    const scalar Re = magUp[facei]*y[facei]/nuw[facei];
    const scalar ryPlusLam = 1/yPlusLam_;

    int iter = 0;
    scalar yp = yPlusLam_;
    scalar yPlusLast = yp;

    do
    {
        yPlusLast = yp;
        if (yp > yPlusLam_)
        {
            yp = (kappa_*Re + yp)/(1 + log(E_*yp));
        }
        else
        {
            yp = sqrt(Re);
        }
    } while(mag(ryPlusLam*(yp - yPlusLast)) > 0.0001 && ++iter < 20);

    yPlus[facei] = yp;
}
```

`nutUWallFunction`：循环内

$$y^+_{\text{new}} = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \le y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

其中$Re = \dfrac{u_1 y_1}{\nu}$

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ < y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{1}{\kappa}\ln(Ey^+) & \text{if } y^+ \ge y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

牛顿迭代法求解$f(x)=0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$构造:

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+\nu/y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\text{new}} = y^+ - \frac{\frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{\frac{1}{\kappa}\frac{E}{Ey^+}\frac{y^+}{Re} + \frac{1}{\kappa}\frac{1}{Re}\ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+\ln(Ey^+) - Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

牛顿迭代法求解$f(x)=0$：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+ > y^+_{\mathsf{Laminar}}$构造：

$$f(y^+)=\frac{1/\kappa\ln(Ey^+)}{u^+}-1$$

而

$$u^+=\frac{u_1}{u_\tau}=\frac{u_1}{y^+\nu/y_1}=\frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\mathsf{new}}=y^+-\frac{\frac{1/\kappa\ln(Ey^+)}{Re/y^+}-1}{\frac{1}{\kappa}\frac{E}{Ey^+}\frac{y^+}{Re}+\frac{1}{\kappa}\frac{1}{Re}\ln(Ey^+)}=y^+-\frac{y^+\ln(Ey^+)-Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)}=\frac{\kappa Re+y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

牛顿迭代法求解$f(x)=0$：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$构造：

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+\nu/y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\text{new}} = y^+ - \frac{\dfrac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{E}{Ey^+}\dfrac{y^+}{Re} + \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{1}{Re}\ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+\ln(Ey^+) - Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

牛顿迭代法求解$f(x)=0$：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$构造：

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+\nu/y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\text{new}} = y^+ - \frac{\dfrac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{E}{Ey^+}\dfrac{y^+}{Re} + \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{1}{Re}\ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+\ln(Ey^+) - Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

牛顿迭代法求解$f(x)=0$:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+>y^+_{\mathsf{Laminar}}$构造:

$$f(y^+)=\frac{1/\kappa\ln(Ey^+)}{u^+}-1$$

而

$$u^+=\frac{u_1}{u_\tau}=\frac{u_1}{y^+\nu/y_1}=\frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\mathsf{new}}=y^+-\frac{\dfrac{1/\kappa\ln(Ey^+)}{Re/y^+}-1}{\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{E}{Ey^+}\dfrac{y^+}{Re}+\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{1}{Re}\ln(Ey^+)}=y^+-\frac{y^+\ln(Ey^+)-Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)}=\frac{\kappa Re+y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

牛顿迭代法求解$f(x)=0$：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

对于$y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$构造：

$$f(y^+) = \frac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{u^+} - 1$$

而

$$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{u_1}{y^+\nu/y_1} = \frac{Re}{y^+}$$

因此可得迭代方程

$$y^+_{\text{new}} = y^+ - \frac{\dfrac{1/\kappa \ln(Ey^+)}{Re/y^+} - 1}{\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{E}{Ey^+}\dfrac{y^+}{Re} + \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{1}{Re}\ln(Ey^+)} = y^+ - \frac{y^+\ln(Ey^+) - Re\kappa}{1+\ln(Ey^+)} = \frac{\kappa Re + y^+}{1+\ln(Ey^+)}$$

OpenFOAM® 如何计算y^+

对于$y^+ < y^+_{\mathsf{Laminar}}$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Rey^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

`nutUWallFunction`: 循环内迭代公式(y^+迭代初值是$y^+_{\mathsf{Laminar}} = 11.0$)

$$y^+_{\mathsf{new}} = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \le y^+_{\mathsf{Laminar}} \\ \dfrac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y^+_{\mathsf{Laminar}} \end{cases}$$

其中$Re = \dfrac{u_1 y_1}{\nu}$

`nutkWallFunction`: (其中$C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1}/\nu \qquad \text{if } y^+ > y^+_{\mathsf{Laminar}}$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+\kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

对于$y^+ < y^+_{\text{Laminar}}$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Rey^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

`nutUWallFunction`: 循环内迭代公式(y^+迭代初值是$y^+_{\text{Laminar}} = 11.0$)

$$y^+_{\text{new}} = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \leq y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

其中$Re = \dfrac{u_1 y_1}{\nu}$

`nutkWallFunction`: (其中$C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1}/\nu \qquad \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

对于$y^+ < y^+_{\text{Laminar}}$:

$$y^+ = u^+ = \frac{1}{Rey^+} \Rightarrow y^+ = \sqrt{Re}$$

`nutUWallFunction`: 循环内迭代公式(y^+迭代初值是$y^+_{\text{Laminar}} = 11.0$)

$$y^+_{\text{new}} = \begin{cases} \sqrt{Re} & \text{if } y^+ \le y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{\kappa Re + y^+}{1 + \ln(Ey^+)} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

其中$Re = \dfrac{u_1 y_1}{\nu}$

`nutkWallFunction`: (其中$C_\mu = 0.09$)

$$y^+ = C_\mu^{0.25} y_1 \sqrt{k_1}/\nu \qquad \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}}$$

$$\nu_t = \nu \frac{y^+ \kappa}{\ln(Ey^+) - 1.0}$$

nutUSpaldingWallFunction

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!}\right]$$

由$u^+ = \dfrac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \dfrac{u_\tau y_1}{\nu}$，可得到 $f(u_\tau) = 0$，用迭代法求出u_τ（初值$(\nu_t + \nu)\dfrac{u_1}{y_1}$）计算$\nu_t$

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$

nutUSpaldingWallFunction

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!}\right]$$

由$u^+ = \dfrac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \dfrac{u_\tau y_1}{\nu}$，可得到 $f(u_\tau) = 0$，用迭代法求出u_τ（初值$(\nu_t + \nu)\dfrac{u_1}{y_1}$）

计算ν_t

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$

nutUSpaldingWallFunction

$$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!}\right]$$

由$u^+ = \frac{u_1}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{u_\tau y_1}{\nu}$，可得到 $f(u_\tau) = 0$，用迭代法求出u_τ（初值$(\nu_t + \nu)\frac{u_1}{y_1}$）计算$\nu_t$

$$\nu_t = \frac{u_\tau^2}{u_1/y_1} - \nu$$

epsilonWallFunction

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 2.0 k_1 \nu / y_1^2 & \text{if } y^+ \le y^+_{\text{Laminar}} \\ \dfrac{C_\mu^{0.75} k_1^{1.5}}{\nu_t y_1} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

omegaWallFunction

$$\omega_{Vis} = 6\nu/(\beta_1 y_1^2)$$

$$\omega_{Log} = u_*/(C_\mu^{0.5}\kappa y_1), \qquad u_* = \sqrt{C_\mu^{0.5}k_1}$$

- 如果blended=false:

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega_{Vis} & \text{if } y^+ \le y^+_{\text{Laminar}} \\ \omega_{Log} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

- 如果blended=true:

$$\omega_1 = \alpha\omega_{Vis} + (1-\alpha)\omega_{Log}$$

其中$\alpha = e^{-Re_y/11}$, $Re_y = y_1\sqrt{k_1}/\nu$

且ω_{Log}中的$u_* = \sqrt{\alpha\nu u_1/y_1 + (1-\alpha)C_\mu^{0.5}k_1}$

$$\omega_{Vis} = 6\nu/(\beta_1 y_1^2)$$

$$\omega_{Log} = u_*/(C_\mu^{0.5}\kappa y_1), \qquad u_* = \sqrt{C_\mu^{0.5} k_1}$$

- 如果`blended=false`:

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega_{Vis} & \text{if } y^+ \leq y^+_{\text{Laminar}} \\ \omega_{Log} & \text{if } y^+ > y^+_{\text{Laminar}} \end{cases}$$

- 如果`blended=true`:

$$\omega_1 = \alpha\omega_{Vis} + (1-\alpha)\omega_{Log}$$

其中$\alpha = e^{-Re_y/11}, \quad Re_y = y_1\sqrt{k_1}/\nu$

且ω_{Log}中的$u_* = \sqrt{\alpha\nu u_1/y_1 + (1-\alpha)C_m u^{0.5} k_1}$

近壁网格尺寸

一般有两种策略

- 求解粘性层（viscous sub-layer）
  - 计算包括整个边界层
  - 如果边壁效应比较重要，比如关心反梯度、流动阻力等
  - 近壁第一层网格尺度$y^+ \sim \mathcal{O}(1)$
  - 选择合适的低雷诺数湍流模型(比如$k-\omega \; SST$)
- 采用壁面函数
  - 用log-law模拟边界层内部流动
  - 适合那些边壁效应不重要的问题
  - 理论上$y^+ > 11$，实际最好$y^+ > 30$
  - 选择高雷诺数湍流模型

湍流模型和壁面函数完整的介绍可以参考官网

https://cfd.direct/openfoam/user-guide/v8-turbulence/

Thank you.

欢迎私下交流，请勿私自上传网络，谢谢!